2026年　東大数学　文系第2問①

3点で三角形が作られる条件は

3点とも重ならない（同一の点にならない）	かつ	同一直線上にない
↓		↓ 余事象
${}_nC_r$を使って計算すれば同じ点を選ばない		同一直線上にある場合を計算する

3点が三角形をなす条件は超重要！
よく覚えておこう。

解法1　縦、横、斜めで場合分け

(1)

余事象をとり、3点が三角形を作らない場合を考える。

異なる3点が、同一直線上に並ぶ場合の数を数えればよい。

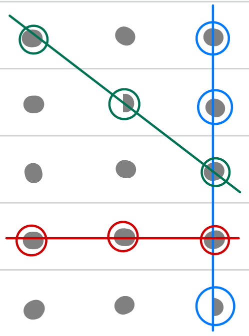
(ア) 3点がx軸に平行に並ぶ場合　横

$y=1,2,3,4,5$の　5通り

(イ) 3点がy軸に平行に並ぶ場合　縦

$x=1$上に並ぶのは、
5点のうち3点選ぶので
${}_5C_3=10$通り

$x=1,2,3$の3通りあるので
$10\times 3=30$通り



5点から
3点えらぶ
${}_5C_3$

(ウ) x軸平行でもy軸平行でもない場合　斜め

傾き1、−1、2、−2の4種類が考えられる。

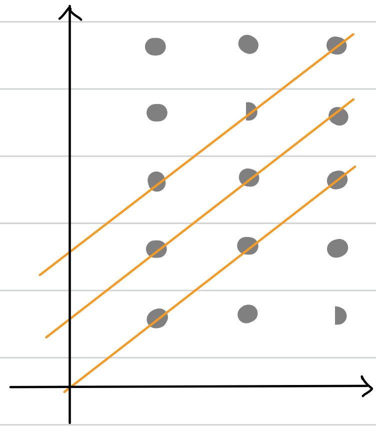
① 傾き1の場合

$y=x$ と $y=x+1$ と $y=x+2$

の3本がある。　3通り

② 傾き−1の場合

対称性から、①と同じで
3通り



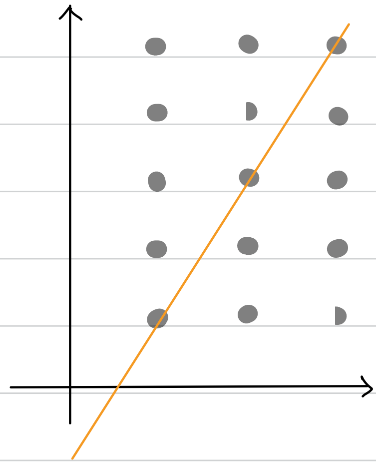
③ 傾き2の場合

$y=2x-1$の　1通り

④ 傾き−2の場合

対称性から、③と同じで
1通り

(ウ) 全体で、$3+3+1+1=8$通り



以上より (ア)〜(ウ) を合計すると

$5+30+8=43$通り

15個の点から3つ選ぶのは　${}_{15}C_3=\dfrac{\cancel{15}^{5}\times\cancel{14}^{7}\times 13}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times 1}=455$

よって　$1-\dfrac{43}{455}=\dfrac{412}{455}$

2026年 東大数学 文系第2問②

(2)

(1)と同様に余事象をとり、同一直線上に並ぶ場合を考える。

(ア) x軸に平行に並ぶ場合 横

$y=1,2,3,\cdots 2m$ の $2m$通り

(イ) y軸に平行に並ぶ場合 縦

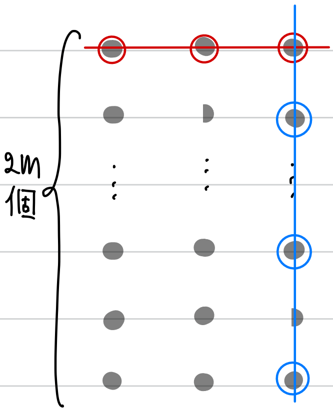
$x=1$ 上に並ぶのは、

$2m$個の点のうち3点選ぶので

$${}_{2m}C_3 = \frac{2m(2m-1)(2m-2)}{3\times2\times1} = \frac{1}{3}m(2m-1)(2m-2) \text{ 通り}$$

$x=1,2,3$ の 3通りあるので

$$\frac{1}{3}m(2m-1)(2m-2)\times3 = m(2m-1)(2m-2) \text{ 通り}$$



(ウ) x軸平行でもy軸平行でもない場合 斜め

傾きをkとして、同一直線上に3点が並ぶ場合を考える。

傾きkの直線をℓとする。

① $k>0$ の場合

ℓが$(1,\ell)$を通るとすると

通る点は、

$(1,\ell)$ $(2,\ell+k)$ $(3,\ell+2k)$

の3つ。

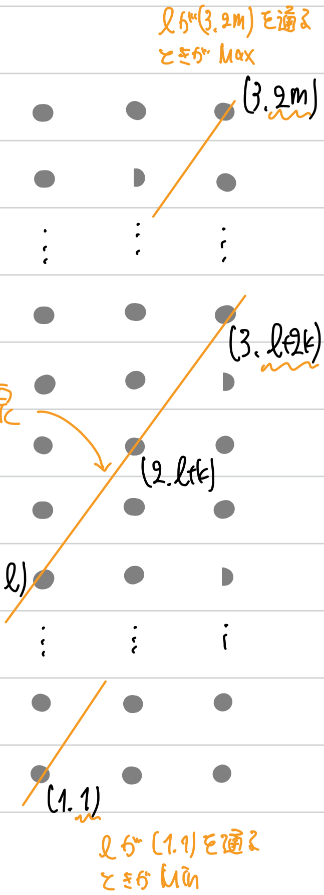
・ℓの最小値は1なので

$1\leqq \ell$

・$\ell+2k$の最大値は$2m$なので

$\ell+2k\leqq 2m$

$\therefore\ \ell\leqq 2m-2k$



よってℓの範囲は

$1\leqq \ell\leqq 2m-2k$ となる。

この不等式を満たす整数ℓは

$2m-2k$個なので、

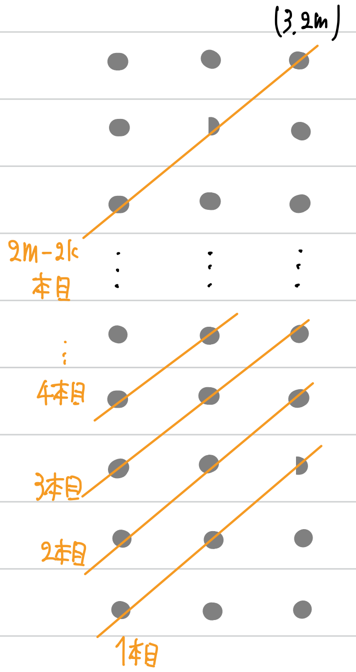
これは、傾きkの直線が

$2m-2k$本引けることがわかる

これで $\sum_{k=?}^{?}(2m-2k)$

Σの中身がわかった

次にkの範囲を求める。



kは正の整数なので、

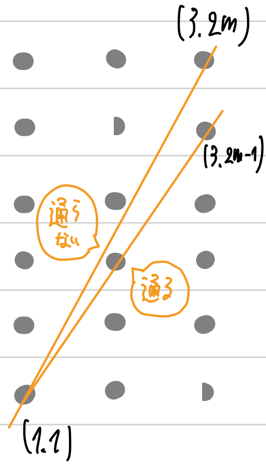
$k=1$ が最小値

縦の点が偶数であることを考えると、

$(1,1)$と$(1,2m)$を通る直線には

3点が並ばない。

※ 中点が $\left(2, \frac{2m+1}{2}\right)$ となる 非整数



よって、$(1,1)$と$(3,2m-1)$を通るのが

傾き最大で、$\frac{2m-1-1}{3-1} = m-1$

よってkの範囲は $1\leqq k\leqq m-1$

$\sum_{k=1}^{m-1}(2m-2k)$ とわかった

以上から $k>0$ の場合、全部で

$$\sum_{k=1}^{m-1}(2m-2k) = 2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k) = 2\left\{m(m-1)-\frac{1}{2}(m-1)m\right\}$$

$$=2m(m-1)-m(m-1)$$

$$=m(m-1) \text{ 通り}$$

別解

Σの中身が(kの)1次式なので、

等差数列の和で求められる。

項数 $\boxed{m-1}$ 代入して末項　　項数　初項　末項

$$2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k) = \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}(m-1)\{(m-1)+(m-(m-1))\}$$

$k=1$ 代入して初項

$$=m(m-1)$$

2026年　東大数学　文系第2問③

② $k<0$ の時.

対称性から、$k>0$ の場合と同数なので

$m(m-1)$ 通り

よって (ウ) 全体で $2\times m(m-1) = 2m(m-1)$ 通り

以上より (ア)〜(ウ) を合計すると.

$$2m + m(2m-1)(2m-2) + 2m(m-1)$$

$$= 2m + 4m^3 - 6m^2 + 2m + 2m^2 - 2m$$

$$= 4m^3 - 4m^2 + 2m$$

$$= 2m(2m^2 - 2m + 1)$$

$6m$ 個の点から 3つ選ぶのは ${}_{6m}C_3 = \dfrac{\cancel{6}m \times (6m-1) \times (6m-2)}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}$

$$= m(6m-1)(6m-2)$$

よって求める確率は

$$1 - \frac{\cancel{2m}(2m^2-2m+1)}{\cancel{m}(6m-1)\underbrace{\cancel{(6m-2)}}_{3m-1}}$$

$$= \frac{(6m-1)(3m-1) - (2m^2-2m+1)}{(6m-1)(3m-1)}$$

$$= \frac{18m^2 - 9m + 1 - (2m^2 - 2m + 1)}{(6m-1)(3m-1)}$$

$$= \frac{16m^2 - 7m}{(6m-1)(3m-1)}$$

$$= \frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)} \quad //$$

解法2. 横と斜めをまとめる

x 軸平行 (横) は、斜めの場合の $k=0$ なので、まとめてしまう。

・$k \geqq 0$ とする。

傾き k に対し、$2m-2k$ 本の直線が引けるところまでは

解法1と同じ.

k の範囲を、$1 \leqq k \leqq m-1$ でなく、$0 \leqq k \leqq m-1$ にする。

$$\text{よって} \quad \sum_{k=0}^{m-1}(2m-2k) = \underbrace{(2m-2\times 0)}_{k=0\text{を代入}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1}(2m-2k)}_{\text{解法1と同じ}}$$

$$= 2m + m(m-1) \text{ 通り}$$

・$k \leqq 0$ の場合も同数なので、2倍して.

$$2\times\{2m + m(m-1)\}$$

・$k=0$ が重複しているので、$2m$ を引く

$$2\times\{2m + m(m-1)\} - 2m \longleftarrow \text{横+斜め}$$

2026年　東大数学　文系第2問④

解法3 中点が整数になるかどうかで考察

(A) y軸に平行(縦)に関しては解法1と同じ

$2m(2m-1)(m-1)$ 通り

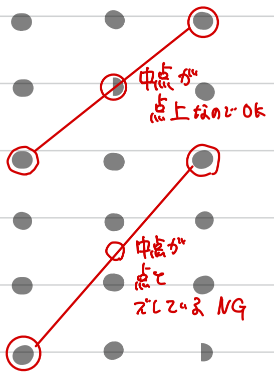
(B) y軸に平行でない場合

$(1, y_1)$ と $(3, y_3)$ の

中点 $\left(2, \dfrac{y_1+y_3}{2}\right)$

の y座標 $\dfrac{y_1+y_3}{2}$

が整数になればよい。



y_1 と y_3 は1以上 $2m$ 以下の整数

$\dfrac{y_1+y_3}{2}$ が整数 $\iff$ y_1+y_3 が偶数

であり

偶数+偶数か

奇数+奇数となれ

ばよい。

ぐきの和

+	ぐ	き
ぐ	ぐ	き
き	き	ぐ

1以上 $2m$ 以下の整数は

偶数も奇数も m 個ずつあるので、

$m\times m + m\times m = 2m^2$ 通り

y_1 ぐ y_3 ぐ　y_1 き y_3 き

よって $1-\dfrac{2m(2m-1)(m-1)+2m^2}{{}_{6m}C_3}$

$$=\frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}$$ //