2026年 東大数学 文系第3問 ①

まず、$f(x)$ と $g(x)$ の形を考察する。

$$f(x)=\frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-3$$

- 軸が $x=1$
- 下に凸の
- 2次関数

$$g(x)=\begin{cases} x-2n & (2n \leqq x \leqq 2n+1) \\ -x+2n+2 & (2n+1 \leqq x \leqq 2n+2) \end{cases}$$

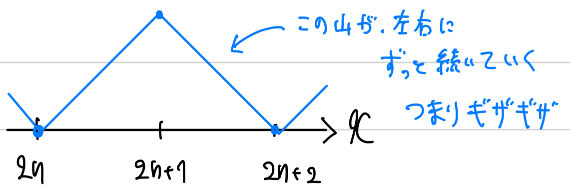
傾き1　傾き−1

$g(2n)=2n-2n=0$ (上に代入)

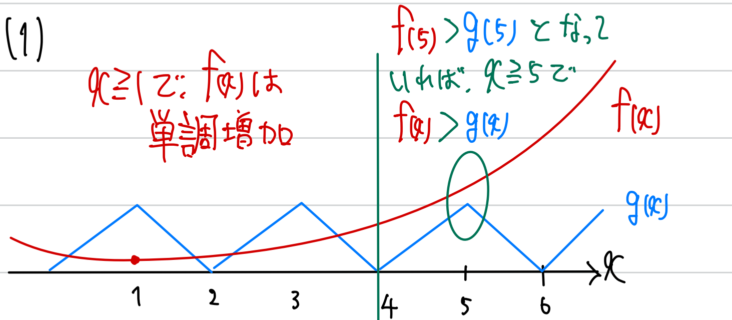
$g(2n+1)=2n+1-2n=1$ (上に代入)

or $g(2n+1)=-(2n+1)+2n+2=1$ (下に代入)　境界は上でも下でもok

$g(2n+2)=-(2n+2)+2n+2=0$ (下に代入) より



(1)



$g(x)$ は $0\leqq y\leqq 1$ をギザギザするだけなので、$g(x)$ の最大値は1

ココより右で、$f(x) > g(x)$ となっていることを示す。

$x\geqq 5$ で、$f(x)$ は単調増加で、$g(x)$ の最大値は1である。
また、$g(5)=1$ であるから、$4\leqq x\leqq 5$ で $f(x)>g(x)$ が示せれば、$f(5)>g(5)=1$ となるため、$4\leqq x$ 全体で $f(x)>g(x)$ が示せる。

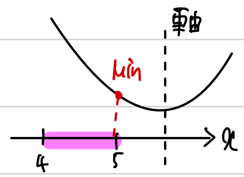
$4\leqq x\leqq 5$ で $g(x)=x-4$

よって、$4\leqq x\leqq 5$ において
$f(x)>g(x)$ つまり $f(x)-g(x)>0$ を示す。
$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと、
$4\leqq x\leqq 5$ における $(h(x)\text{の最小値})>0$ となればよい

$$\begin{aligned} h(x)&=\frac{a}{8}(x-1)^2+\frac{2}{a}-3-(x-4) \\ &=\frac{a}{8}(x^2-2x+1)+\frac{2}{a}-x+1 \\ &=\frac{a}{8}x^2+\left(-\frac{a}{4}-1\right)x+\frac{a}{8}+\frac{2}{a}+1 \\ &=\frac{a}{8}\left\{x^2+\left(-2-\frac{8}{a}\right)x\right\}+\frac{a}{8}+\frac{2}{a}+1 \\ &=\frac{a}{8}\left\{x-\left(1+\frac{4}{a}\right)\right\}^2-\frac{a}{8}\left(1+\frac{4}{a}\right)^2+\frac{a}{8} \end{aligned}$$

$0<a<1$ から、$1<\frac{1}{a}$　よって　$5<1+\frac{4}{a}$ なので、
$h(x)$ の軸は $x>5$ にある。

よって $4\leqq x\leqq 5$ における
$h(x)$ の最小値は $h(5)$ である。



$$\begin{aligned} h(5)&=\frac{a}{8}\times 4^2+\frac{2}{a}-3-1 \\ &=2a+\frac{2}{a}-4 \\ &\geqq 2\sqrt{2a\times\frac{2}{a}}-4 \\ &=0 \end{aligned}$$

相加相乗

等号成立条件は $2a=\frac{2}{a}$ より $a^2=1$
$0<a<1$ で $a^2=1$ を満たす a はない。
よって $h(5)\geqq 0$ は等号が成立しないため、$h(5)>0$
つまり $4\leqq x\leqq 5$ で $f(x)>g(x)$ である。
また、$x\geqq 5$ で $f(x)>g(x)$ も示されたため、
$x\geqq 4$ で $f(x)>g(x)$ //

2026年　東大数学　文系第3問②

別解

$$h(x) = \frac{a}{8}(x-1)^2 + \frac{2}{a} - 3 - (x-4)$$

$$= \frac{a}{8}x^2 - \left(1+\frac{a}{4}\right)x + \frac{a}{8} + 1 + \frac{2}{a}$$

$$= \frac{a}{8}\left\{x^2 - \left(2+\frac{8}{a}\right)x + \underbrace{1 + \frac{8}{a} + \frac{16}{a^2}}\right\}$$

$$= \frac{a}{8}\underbrace{\left\{x - \left(1+\frac{4}{a}\right)\right\}^2} \geqq 0$$

$\left(1+\frac{4}{a}\right)^2$ と変形できる

なんと2乗になった！ウマイけど思いつきづらいかも

$1+\frac{4}{a} > 5$ なので、

$4 \leqq x \leqq 5$ には $x = 1+\frac{4}{a}$ とならない。

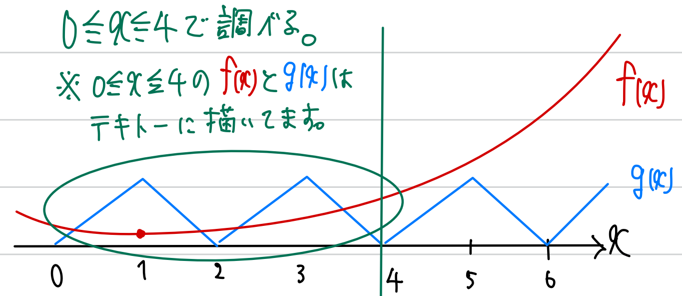
つまり、$h(x) = \frac{a}{8}\left\{x-\left(1+\frac{4}{a}\right)^2\right\} \geqq 0$ の

の等号は成立しない。$h(x) > 0$

(2) グラフを再度確認

$0 \leqq x \leqq 4$ で調べる。

※ $0 \leqq x \leqq 4$ の $f(x)$ と $g(x)$ はテキトーに描いてます。



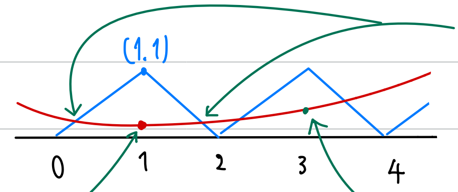
$x \geqq 4$ では $f(x) > g(x)$ なので、共有点はない。

共有点を調べるために、$f(0)$ $f(1)$ $f(2)$ $f(3)$ の値を調べて、$f(x)$ と $g(x)$ の大小を決める。

- $f(0) = \frac{a}{8} + \frac{2}{a} - 3$ ◀すぐにわからないので保留
- $f(1) = \frac{a}{8} \times 0^2 + \frac{2}{a} - 3 = \frac{2}{a} - 3$

$\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$ のとき $\frac{3}{2} < \frac{1}{a} < 2$ より　$3 < \frac{2}{a} < 4$ なので

$0 < \frac{2}{a} - 3 < 1$　$\therefore 0 < f(1) < 1$ ◀うまくわかった！



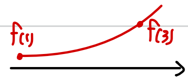
f(x)は単調増加
g(x)は単調減少なので
1≦x≦2に共有点がある
対称から0≦x≦1にもある

f(1)は確かにココ。
x軸より上で(1, 1)より下。

f(3)が0より大きいか、1より大きいかを知りたい

$$f(3) = \frac{a}{8} \times 4 + \frac{2}{a} - 3 = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - 3$$

- $f(x)$ は $1 \leqq x$ で単調増加なので



$f(3) > \underbrace{f(1) > 0}_{\text{さっき調べた}}$　$\therefore f(3) > 0$

- $f(3) - 1 = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - 3 - 1$

$f(3)$ と1の大小を知りたいので差をとる

$= \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - 4$ ◀すぐに正負がわからないので通分

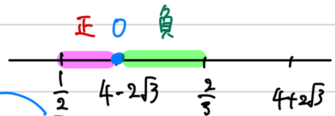
$= \frac{a^2 - 8a + 4}{2a}$ ◀(分母)>0なので分子の正負だけ見る

$a^2 - 8a + 4 = 0$ を解くと、$a = 4 \pm 2\sqrt{3}$ なので

$$f(3) - 1 \begin{cases} > 0 & (a < 4-2\sqrt{3},\ 4+2\sqrt{3} < a) \\ = 0 & (a = 4 \pm 2\sqrt{3}) \\ < 0 & (4-2\sqrt{3} < a < 4+2\sqrt{3}) \end{cases}$$

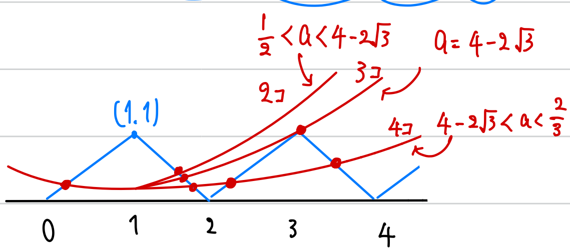
$\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$ と共通範囲

$$f(3) \begin{cases} > 1 & \left(\frac{1}{2} < a < 4-2\sqrt{3}\right) \\ = 1 & (a = 4-2\sqrt{3}) \\ < 1 & \left(4-2\sqrt{3} < a < \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$



※ $1.7 < \sqrt{3} < 1.75$ として計算すると、

$0.5 < 4-2\sqrt{3} < 0.6$　$10.8 < 4+2\sqrt{3} < 11$



上図のようになるので、

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < a < 4-2\sqrt{3} \text{ のとき } 2\text{コ} \\ a = 4-2\sqrt{3} \text{ のとき } 3\text{コ} \\ 4-2\sqrt{3} < a < \frac{2}{3} \text{ のとき } 4\text{コ} \end{cases}$$

//