2026年　東大数学　文系第4問 ①

(1) tanの加法定理より

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\theta\times\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\tan\theta+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\theta}$$

(2) $P(p,\ p^3-kp)$　$Q(q,\ q^3-kq)$ とおく

(但し $p\neq 0,\ q\neq 0,\ p\neq q$ とする)

まずは自分で設定をするフェーズ

$y=x^3-kx$ に対し $y'=3x^2-k$ なので、O, P, Q における接線の傾きは、

$-k,\ 3p^2-k,\ 3q^2-k$ である。

$x=0$　$x=p$　$x=q$

$-k$が一番小さいのは自明

ここで $3p^2-k<3q^2-k$ としても一般性を失わない。

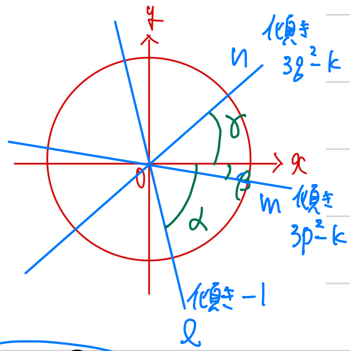
$3p^2-k$ と $3q^2-k$ の大小も決めておくと

点O, P, Q における接線を l, m, n とする。
x軸正方向からはかった l, m, n の角を α, β, γ とすると、

$\tan\alpha=-k$　$\tan\beta=3p^2-k$　$\tan\gamma=3q^2-k$

(但し $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$) である。

ココで α, β, γ の大小も決まる。



座標上で角を扱う問題は、
回転方向の正負(反時計回りが正)
$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ (π 回転すると同じ値 つまり周期性)
が面倒なので
なるべく大小を決めたい。

条件(※)を満たすには

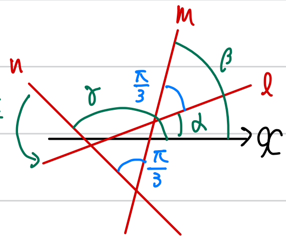
$\beta=\alpha+\frac{\pi}{3}$　$\gamma=\alpha+\frac{2}{3}\pi$ となればよい。

今回 $\begin{cases}\beta\text{は}\alpha\text{から}\frac{\pi}{3}\text{まわった角}\\ \gamma\text{は}\alpha\text{から}\frac{2\pi}{3}\text{まわった角}\end{cases}$ とおいたが、

例えば $\gamma=\beta+\frac{\pi}{3}$　$\alpha=\beta+\frac{2}{3}\pi$ などでもOK

α から測った角は α と $\alpha+\frac{\pi}{3}$ と $\alpha+\frac{2}{3}\pi$ の3種類のみ

nを$\frac{\pi}{3}$まわすとlと同じ傾きになる



$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\gamma<\frac{\pi}{2}$ に代入すると、

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\alpha+\frac{\pi}{3}<\alpha+\frac{2}{3}\pi<\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}\qquad -\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{2}{3}\pi<\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{-\frac{5}{6}\pi<\alpha<\frac{\pi}{6}}\qquad \boxed{-\frac{7}{6}\pi<\alpha<-\frac{\pi}{6}}$$

$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ とあわせて　$-\frac{\pi}{2}<\alpha<-\frac{\pi}{6}$

$\tan\beta=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ より

(1)より加法定理

$$\tan\beta=\frac{\tan\alpha+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\alpha}$$

$\tan\alpha=-k$
$\tan\beta=3p^2-k$

$$3p^2-k=\frac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}$$

2026年　東大数学　文系第4問②

$$\tan\gamma = \tan\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$
πずらしても同じ

$$= \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$$

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}$$

$\tan(\alpha+\beta)$の符号の部分を逆にする

$$3q^2 - k = \frac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}$$

問いの確認

「条件(*)を満たすP, Qが存在するようなkの範囲」
P, Qのx座標をp, qとおいたので
p, qが存在すればよい。

pとqの式を1つずつ見ていこう

$$3p^2 - k = \frac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}$$ より

$$3p^2 = \frac{-k+\sqrt{3}+k(1+\sqrt{3}k)}{1+\sqrt{3}k}$$

$$p^2 = \frac{\sqrt{3}(k^2+1)}{3(1+\sqrt{3}k)}$$

$$p^2 = \frac{k^2+1}{\sqrt{3}+3k}$$ //

同様に $$3q^2 - k = \frac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}$$

$$3q^2 = \frac{-k-\sqrt{3}+k(1-\sqrt{3}k)}{1-\sqrt{3}k}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}k^2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}$$

$$q^2 = \frac{-\sqrt{3}(k^2+1)}{3(1-\sqrt{3}k)} \qquad \therefore\ q^2 = \frac{k^2+1}{\sqrt{3}k-1}$$

$p^2 > 0$ なので　($p \neq 0$ なので $p^2 \neq 0$)

$$p^2 = \frac{k^2+1}{\sqrt{3}+3k} > 0 \qquad k^2+1>0 \text{ より}$$

$$\therefore\ \sqrt{3}+3k > 0 \qquad k > -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

同様に $q^2 > 0$ なので、($q \neq 0$)

$$q^2 = \frac{k^2+1}{\sqrt{3}k-1} > 0 \qquad k^2+1>0 \text{ より}$$

$$\therefore\ \sqrt{3}k-1 > 0 \qquad k > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$k > -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ かつ $k > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より $k > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

実際に値を1つ提示して存在を示す。

これを満たすとき

$$p = \pm\sqrt{\frac{k^2+1}{\sqrt{3}+3k}} \qquad q = \pm\sqrt{\frac{k^2+1}{\sqrt{3}k-1}}$$ となり

$$\sqrt{\frac{k^2+1}{\sqrt{3}+3k}} = p_0 \qquad \sqrt{\frac{k^2+1}{\sqrt{3}k-1}} = q_0$$ とおくと、

$(p, q) = (\pm p_0, \pm q_0)$ の4組が考えられるが

$(p_0, q_0)\ (-p_0, q_0)$
$(p_0, -q_0)\ (-p_0, -q_0)$

例えば $(p, q) = (p_0, q_0)$ とすると

$p_0 < q_0$ となり
(つまり、pとqの大小関係もOK)

$\dfrac{k^2+1}{3k+\sqrt{3}}$ と $\dfrac{k^2+1}{3k-1}$ は共に正
分子同じで、分母だけちがうので
大小比較可

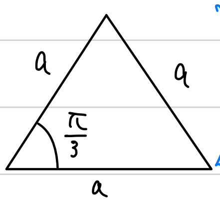
実際にp, qが存在する。

よって $k > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ //

2026年 東大数学 文系第3問③

(3) なす角$\frac{\pi}{3}$の3直線で作られるので、正三角形である。

正三角形の面積は
1辺の長さをaとすると
$\frac{1}{2}\times a^2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
つまり1辺の長さがわかれば
面積がわかる。⇒ 1辺の長さを求める。



まず、l, m, nの交点を求めて、1辺の長さを求める

l, m, nの方程式を求めると

$$\begin{cases} l: & y=-kx \\ m: & y=(3p^2-k)(x-p)+p^3-kp \\ n: & y=(3q^2-k)(x-q)+q^3-kp \end{cases}$$

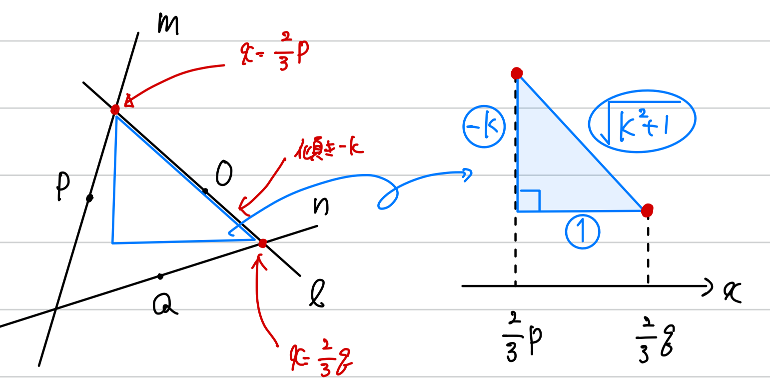
lとmを連立して

$$-\cancel{kx}=3p^2x-\cancel{kx}-3p^3+\cancel{kp}+p^3-\cancel{kp}$$

$3p^2x=2p^3$　　$x=\frac{2}{3}p$

同じ計算になるはずなので略してOK

同様にlとnを連立すると、$x=\frac{2}{3}q$



よって正三角形の1辺の長さは

$$\left|\frac{2}{3}q-\frac{2}{3}p\right|\times\sqrt{k^2+1}$$

(2)では1例として$p_0<q_0$の例を示したが
$p>q$となる例があるかもしれないので
絶対値をつけておく

よって

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left|\frac{2}{3}q-\frac{2}{3}p\right|\sqrt{k^2+1}\right)^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{4}{9}(q-p)^2(k^2+1)=\frac{\sqrt{3}}{9}(q-p)^2(k^2+1)$$

ココの最大最小を求める。

pとqの候補は

$(p,q)=(p_0,q_0),(-p_0,q_0),(p_0,-q_0),(-p_0,-q_0)$

の4組であるが、$(q-p)^2$の値は下図のようになる。

(p,q)	$(q-p)^2$
(p_0,q_0)	$(q_0-p_0)^2$
$(-p_0,q_0)$	$(q_0+p_0)^2$ 最大
$(p_0,-q_0)$	$(q_0+p_0)^2$
$(-p_0,-q_0)$	$(q_0-p_0)^2$ 最小

よって
$(p,q)=(-p_0,q_0),(p_0,-q_0)$
のとき最大
$(p,q)=(p_0,q_0),(-p_0,-q_0)$
のとき最小となる。よって

$$M=\frac{\sqrt{3}}{9}(q_0+p_0)^2(k^2+1)\qquad m=\frac{\sqrt{3}}{9}(q_0-p_0)^2(k^2+1)$$

$M=4m$より

$$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{9}}(q_0+p_0)^2\cancel{(k^2+1)}=4\times\cancel{\frac{\sqrt{3}}{9}}(q_0-p_0)^2\cancel{(k^2+1)}$$

$$q_0^2+2p_0q_0+p_0^2=4(q_0^2-2p_0q_0+p_0^2)$$

$$3p_0^2-10p_0q_0+3q_0^2=0$$

$$(p_0-3q_0)(3p_0-q_0)=0$$

$p_0=3q_0$, $3p_0=q_0$　　$p_0<q_0$より　$3p_0=q_0$

p_0とq_0の値を代入して、

$$3\sqrt{\frac{\cancel{k^2+1}}{3k+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\cancel{k^2+1}}{3k-\sqrt{3}}}$$

2乗

$$9\times\frac{1}{3k+\sqrt{3}}=\frac{1}{3k-\sqrt{3}}$$

$$9(3k-\sqrt{3})=3k+\sqrt{3}$$

$$27k-9\sqrt{3}=3k+\sqrt{3}$$

$$24k=10\sqrt{3}$$

$$k=\frac{5\sqrt{3}}{12}$$